

Análisis comparativo del uso de la ecuación de Euler y el estudio aerodinámico en máquinas axiales

A. Cantizano, E. Arenas, L. Mochón, A. Arenas

Dpto. Ingeniería Mecánica. Universidad Pontificia Comillas de Madrid (ICAI)
Alexis.cantizano@dim.icae.upcomillas.es

Resumen

La ecuación que expresa la energía por unidad de masa intercambiada en el rodete de una turbomáquina es la ecuación de Euler. Esta ecuación, incluso con sus restricciones, revela gran parte de lo que sucede en el rodete, y se conoce como su ecuación fundamental.

Ahora bien, la ecuación de Euler está basada en el estudio unidimensional del flujo, de forma que se estudia el comportamiento de todo el flujo a través de una línea de corriente representativa del conjunto. Esto es suficientemente válido cuando el flujo de fluido es guiado por un elevado número de álabes, pero introduce fuertes errores cuando el número de álabes es reducido, incorporándose en algunos casos factores de corrección (coeficientes de disminución de trabajo). Por ello se ha generalizado el estudio de ciertas turbomáquinas (principalmente las axiales, tanto hidráulicas, v.g. aerogeneradores, como térmicas) mediante el método aerodinámico, abandonando así el uso de la ecuación de Euler.

El método aerodinámico abandona la hipótesis del método unidimensional en el que se basa la aplicación de la ecuación de Euler. Los álabes no se consideran ya formando conductos, sino que son perfiles de ala inmersos en el flujo. De esta forma, en máquinas con alta velocidad específica, en las cuales la distancia entre los álabes es muy grande, este punto de vista es el único admisible.

En este trabajo se evaluará la validez de la ecuación de Euler en turbomáquinas axiales, en las que el estudio aerodinámico resulta más preciso. Se compararán las hipótesis y restricciones establecidas en su aplicación, buscando sus conexiones desde el punto de vista teórico y se tratará de establecer una metodología a seguir.

INTRODUCCIÓN

La ecuación de Euler sigue siendo un punto de partida a la hora de tratar de evaluar la altura o energía que intercambia el fluido con la turbomáquina. Pero en el caso de las turbomáquinas axiales, existe controversia a la hora de usar, bien esta ecuación fundamental o bien el método aerodinámico, debido a las diferentes hipótesis que se deben realizar en cada uno de los dos métodos para poder ser utilizados [1].

Con la ecuación de Euler, la restricción de flujo unidimensional donde todas las partículas se comportan de igual forma a través de la turbomáquina es imprescindible.

Sin embargo, en el método aerodinámico, los álabes se consideran perfiles de ala inmersos en el flujo donde todas las partículas fluidas experimentan su influencia mutua. Además, los álabes de una turbomáquina axial no son realmente perfiles aislados sino que forman un enrejado o cascada. También hay que considerar que el álabe está limitado por dos extremos, en un extremo el cubo del rodete y en el otro la carcasa o estator de la máquina. Los flujos secundarios de la cara inferior a la superior del perfil, así como la formación de los torbellinos de herradura característicos de los álabes de luz finita no son aquí posibles debido a la formulación seguida [2].

Recientemente, con el uso de técnicas numéricas como el CFD, se ha avanzado mucho en la comprensión del flujo tridimensional que realmente tiene lugar en el interior de estas máquinas [3]. Pero el coste computacional para evaluar de forma precisa el comportamiento del fluido, a veces hace que sea inviable este tipo de simulaciones.

En este trabajo se comparan los resultados obtenidos para la altura entregada por una bomba axial siguiendo ambos métodos. Se comprueba la diferencia en los resultados alcanzados y se verifica que el método de Euler es menos preciso por las fuertes restricciones a las que se ve sometida su formulación. Como conclusión se propone un factor de corrección total, que permite relacionar ambos métodos y que trata de ayudar al diseño preliminar de este tipo de turbomáquinas.

METODOLOGÍA

Para establecer el método aerodinámico y considerar el álabe como un perfil de ala inmerso en una corriente, se considera el efecto que realiza el valor medio de la velocidad relativa que atraviesa el álabe desde su punto de entrada (1) a su punto de salida (2). Con este valor medio w_∞ , las fuerzas de sustentación (L) y arrastre (D) que se generan en un álabe se definen, como en [4], según las Ec (1) y Ec (2):

$$L = \frac{1}{2} C_L \rho b l w_\infty^2 \tag{1}$$

$$D = \frac{1}{2} C_D \rho b l w_\infty^2 \tag{2}$$

donde C_L y C_D son los coeficientes experimentales de arrastre y sustentación, ρ es la densidad del fluido, b es el ancho o altura del perfil y l la longitud de la cuerda (Fig. (1)). Los coeficientes experimentales dependen de la forma del perfil, del ángulo de ataque (α) y de su relación de aspecto (b/l).

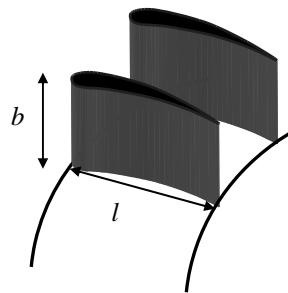


Fig. 1. Geometría simplificada de los perfiles en la turbomáquina axial.

La fuerza total P es la resultante de la fuerza de sustentación y de la fuerza de arrastre y forma un ángulo λ con L , tal y como se muestra en la Fig. (2), que representa el desarrollo cilíndrico del rodete a una distancia determinada del eje de la máquina.

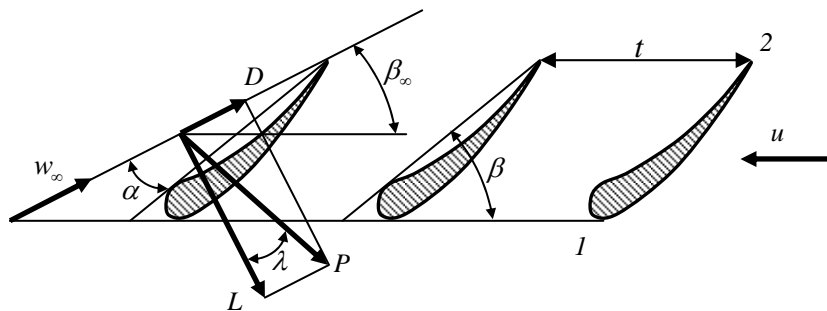


Fig. 2. Fuerzas sobre un perfil en un enrejado.

La potencia (W) debida a esa fuerza resultante P , considerando z álabes y para una velocidad periférica u , se expresa como:

$$zW = zP u \text{seno}(\beta_\infty + \lambda) \tag{3}$$

Así, teniendo en cuenta que el caudal se evalúa como $Q = ztbc_m$, siendo t el paso circunferencial (ver Fig. (2)) y

c_m la velocidad meridional (en máquinas axiales $c_m = c_a$), la altura H_u entregada por el rodete se expresa como:

$$H_u = \frac{zW}{Q\rho g} = \frac{zL/\cos\lambda}{Q\rho g} \tag{4}$$

donde sustituyendo las expresiones para el caudal y la Ec. (1) se obtiene finalmente, como en [4]:

$$H_u = C_L \frac{l}{t} \frac{u}{c_m} \frac{w_\infty^2 \operatorname{seno}(\beta_\infty + \lambda)}{2g \cos\lambda} \tag{5}$$

Por otro lado, los triángulos de velocidad para una máquina axial, se pueden representar como en la Fig. (3):

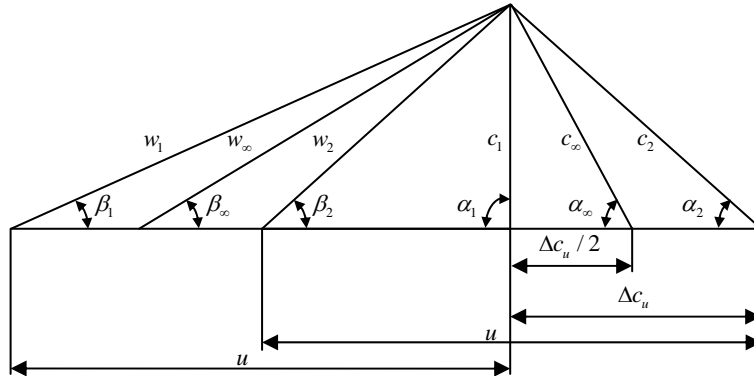


Fig. 3. Triángulos de velocidades a la mitad del álabe en la entrada, salida y promedio.

Hay que señalar que en la Fig. (3), el ángulo que forma la velocidad absoluta c con la velocidad periférica u se conoce en la literatura también como α , aunque no representa el ángulo de ataque o de planeo representado en la Fig. (2).

Aplicando la ecuación de Euler, para el caso de una bomba con infinito número de álabes o flujo unidimensional, la altura que da el rodete se expresa como:

$$H_{u^\infty} = \frac{u(c_{2u} - c_{1u})}{g} = \frac{u\Delta c_u}{g} = \frac{u\Delta w_u}{g} \tag{6}$$

donde generalmente la componente c_{1u} se asume como cero al considerar una entrada radial del fluido al rodete y así se considera en este trabajo.

RESULTADOS

La comparación de ambos métodos se realizará de forma teórica, sobre un perfil Göttingen 682 (Fig. (4) y Tabla (1)) empleado para el diseño del rodete, con 4 álabes, de una bomba, tomado de [2].

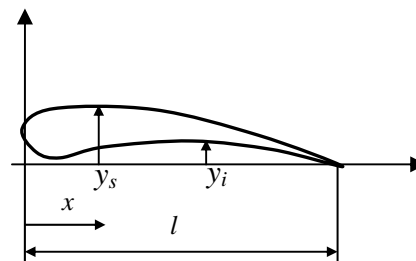


Fig. 4. Nomenclatura de las dimensiones del perfil.

Tabla 1. Coordenadas del perfil Gottingen 682.

x	0	1.25	2.5	5.0	7.5	10	15	20	30
y_s	2.5	4.55	5.55	7.00	8.05	8.90	10.00	10.65	11.20
y_i	2.5	1.05	0.60	0.25	0.10	0.00	0.05	0.20	0.55
x	40	50	60	70	80	90	95	100	
y_s	10.90	10.05	8.65	6.90	4.85	2.55	1.35	0.00	
y_i	0.75	0.80	0.85	0.75	0.60	0.35	0.15	0.00	

En este trabajo se parte de los resultados obtenidos para la geometría en el diseño mencionado anteriormente y se aplica la metodología presentada, en las mismas 5 posiciones o diámetros a lo largo de los álabes tal y como se muestra en la Fig. (5). Se consideran además los mismos datos de $n=590$ rpm, una componente meridional constante $c_m=5$ m/s y agua como fluido bombeado. Igualmente, se han comparado los resultados con el valor aportado por el diseño de $H_u=4.50$ m, constante desde el cubo a la punta del álabe, siendo:

$$H_u = \frac{H}{\eta_h} \quad (7)$$

donde H es la altura efectiva suministrada por la bomba y η_h es el rendimiento hidráulico de la misma.

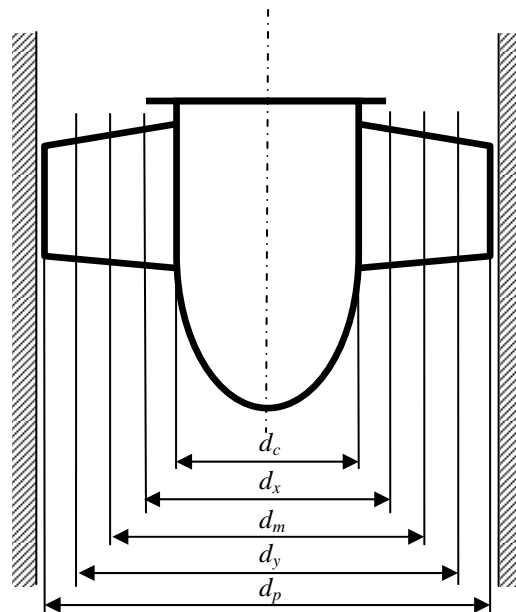


Fig. 5. Diámetros del álabe para el diseño [2].

Los ángulos α y β (ver Fig. (2)) son la solución al diseño de la bomba, donde se han tenido en cuenta las correcciones por enrejado propuestas por el método de Weinell [5]. Los coeficientes C_L y C_D son los generados para un ángulo de planeo mínimo, permitiéndose una pequeña variación en el valor del coeficiente de sustentación para compensar el aumento excesivo de w_∞ y evitar así elafilamiento excesivo. Por tanto, durante el desarrollo del diseño de los ángulos α y β , estos coeficientes han permanecido constantes, utilizándose los valores que se muestran en la Tabla (2). Además, se han evaluado para un perfil de luz infinita, asumiendo por tanto que se encuentra aislado en la corriente. En los perfiles de Göttingen hay que realizar esta corrección por luz infinita, no así en los de NACA, por lo que se han escogido las relaciones propuestas por Weinig y que se recogen en el diseño de partida.

Tabla 2. Datos del perfil Göttingen 682 para la bomba diseñada según [2].

Magnitud	Desarrollos cilíndricos coaxiales				
	d_c	d_x	d_m	d_y	d_p
d [m]	0.325	0.4063	0.4875	0.5688	0.65
t [m]	0.255	0.319	0.383	0.447	0.511
l [m]	0.240	0.194	0.164	0.145	0.131
α	7.078	4.906	4.517	4.277	3.945
β	39.61	29.76	24.71	21.32	18.70
C_L	1.007	0.9756	0.944	0.9097	0.8754
C_D	0.0078	0.0075	0.0072	0.0070	0.0068

El ángulo β_2 es el ángulo entre w_2 y $-u$ del triángulo de velocidades, pero también se considerará como conocido, ya que responde a la geometría del álabe. Para evaluarlo en cada sección, se ha partido de la geometría del perfil (Tabla (1)) y calculando la línea media, se ha determinado el ángulo físico del álabe a la salida, ángulo con el que saldría la corriente respecto de la dirección de la velocidad periférica si dicha corriente fuera totalmente guiada por infinito número de álabes.

Los resultados obtenidos para la energía intercambiada se muestran en la Tabla (3). Además, se ha evaluado la relación entre la altura del diseño H_u para finito número de álabes y la calculada en este trabajo como $H_{u\infty}$ para infinito número de álabes (teniendo en cuenta que todas las líneas de corriente se comportan de igual forma, tal y como requiere la formulación de Euler). Esta relación se conoce en la literatura como coeficiente o factor de disminución del trabajo e_z . Además, se ha evaluado también la relación entre la altura H_u para finito número de álabes calculada mediante el método aerodinámico y la $H_{u\infty}$, denominando a este nuevo factor e_{zt} , ya que recoge de forma completa la relación existente entre ambos métodos y por tanto el efecto de la no uniformidad del flujo que atraviesa la turbomáquina, como se comentará en la siguiente sección.

Tabla 3. Alturas del rodete evaluadas por ambos métodos.

Magnitud	Desarrollos cilíndricos coaxiales				
	d_c	d_x	d_m	d_y	d_p
H_u [m] (dato diseño)	4.50	4.50	4.50	4.50	4.50
Euler: $H_{u\infty}$ [m] (calculado según Ec. (5))	5.65	7.87	11.28	15.69	20.97
$e_z = H_u / H_{u\infty}$ ¹	0.80	0.57	0.40	0.29	0.21
Aerodinámico: H_u [m] (calculado según Ec. (4))	4.26	3.79	3.43	3.20	3.03
$e_{zt} = H_{u-aerodinámico} / H_{u\infty-Euler}$	0.75	0.48	0.30	0.20	0.14

DISCUSIÓN

En la ecuación de Euler, la hipótesis de flujo unidimensional es una fuerte restricción que debe ser corregida a través de diversos métodos, como el propuesto en [6] o en [7], principalmente aplicable para máquinas radiales, que corrigen el efecto del torbellino relativo generado en la superficie transversal. En las máquinas axiales, esta no uniformidad afectaría tanto en la dirección del flujo como a lo largo del álabe. Por esta razón, en la Tabla (3),

¹ Este coeficiente se evalúa de forma aproximada con la corrección debida al torbellino relativo que se corresponde con el estudiado por Stodola aplicable fundamentalmente en máquinas radiales [2].

se han evaluado ambos efectos con dos factores distintos. En el primer e_z , se evalúa únicamente el efecto de la no uniformidad en la dirección del flujo. Y en el segundo, se ha evaluado un factor total, e_{zt} , que recoge los dos efectos mencionados en la sección anterior. La diferencia entre ambos representa la influencia debida a la no uniformidad del flujo a lo largo del álabe, y es la mejora que supone emplear el diseño aerodinámico.

Se aprecia cómo el factor e_z disminuye a medida que las secciones se encuentran más alejadas del eje de la máquina, donde la distancia entre los álabes es mayor y la hipótesis de infinito número de álabes es menos realista. También hay que señalar la diferencia de valores que se alcanzan mediante este método para el valor de la energía entregada al rodete. Esto, de nuevo, confirma lo alejada que está la restricción de uniformidad de flujo de la realidad a la hora de usar este método.

El factor total e_{zt} sigue la misma tendencia que el anterior. Por tanto, la diferencia entre ambos factores recoge la distorsión de la corriente a lo largo del álabe que también aumenta a lo largo del álabe, existiendo una diferencia entre ambos factores que van desde un 5% hasta un 32% en la punta del álabe.

Nótese que si bien en las máquinas axiales las velocidades tangenciales a la entrada y salida de una línea de corriente pueden considerarse iguales ($\vec{u}_2 = \vec{u}_1$), la diferencia de presiones entre las dos caras de un mismo álabe, en el mismo radio, supone una diferencia en sus velocidades relativas, que puede ser asemejada a la suma de la velocidad relativa uniforme (w) y a la velocidad de un torbellino relativo generado en el canal de los álabes (ω_{rel}) (Fig. (6)).

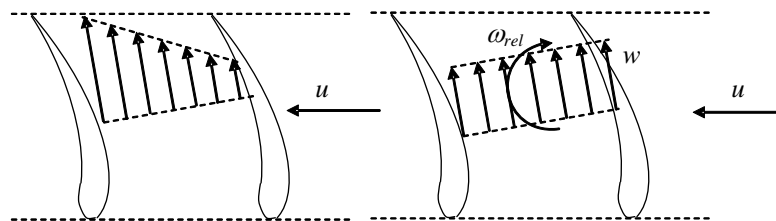


Fig. 6. Distribución de velocidades entre dos álabes consecutivos.

El método aerodinámico se basa en coeficientes experimentales y en correcciones a estos coeficientes. Estos coeficientes experimentales consideran por tanto el efecto de la interacción mutua de las partículas fluidas que fluyen alrededor del perfil. No obstante, la obtención de estos coeficientes experimentales de sustentación y arrastre se realiza mediante el valor medio de la velocidad relativa, algo que para grandes diferencias entre los valores de entrada y de salida al álabe habría que refinar. Además, se tienen en cuenta otros coeficientes de corrección que incluyen efectos tan complejos como el de enrejado, considerando así el efecto de un número finito de álabes. Sin embargo, en el diseño aquí tratado, no se consideran los efectos de la longitud finita del perfil y los efectos fluidodinámicos debido al cubo o a la cercanía de la punta del álabe a la carcasa de la turbomáquina.

Aún así, en máquinas axiales con bajo número de álabes puede considerarse mucho más preciso que el método de Euler ya que la restricción de flujo unidimensional que supone éste es mucho menos realista tal y como se ha comprobado analizando los resultados obtenidos. La diferencia entre ambos métodos se refleja en la diferencia existente entre el coeficiente e_{zt} y el e_z correspondiente a la teoría del torbellino relativo.

Hay que considerar que los valores de altura se corresponden con el valor total de energía intercambiada entre fluido y rodete. Por lo tanto, habría que buscar un valor promedio para los distintos diámetros utilizados o quizás, tomar el valor medio como representativo de lo que ocurre en todo el álabe. Se observa que la uniformidad en los valores de H_u es mayor para el método aerodinámico que para el uso de la ecuación de Euler. Esto indica también que este método es más preciso ya que realmente el efecto de los posibles torbellinos o recirculaciones adicionales por la no uniformidad de la corriente no afecta en la medida que se aprecia en los valores calculados por la ecuación de Euler.

El desarrollo de coeficientes o factores de disminución del trabajo que recojan la no unidimensionalidad del flujo tanto en la dirección del perfil como a lo largo del mismo, permite igualar los valores obtenidos por ambos métodos, siendo mucho mayores las correcciones necesarias para el método de Euler que para el método aerodinámico.

CONCLUSIONES

A partir del diseño de la geometría de una bomba axial presentado en la literatura se ha evaluado la energía entregada al fluido por el rodete mediante el método clásico de la ecuación de Euler y mediante el método aerodinámico. Este último método es más correcto debido a que las restricciones necesarias para su uso no se alejan tanto de la realidad. La ecuación de Euler requiere la hipótesis de uniformidad de flujo o unidimensionalidad en la corriente, algo que para bajo número de álabes y sobre todo, para este tipo de máquinas axiales no se cumple.

En este trabajo, se comparan los resultados obtenidos por ambos métodos y se propone un nuevo factor de corrección para la ecuación de Euler, que trata de acercar los resultados obtenidos por esta ecuación al método aerodinámico. Este nuevo factor e_{cb} , refleja de forma completa el efecto de la no uniformidad en la corriente tanto en la dirección predominante del flujo como a lo largo del álabe, es decir, desde el cubo hasta la punta del mismo.

Por tanto, se hace necesario ampliar la definición de los factores de corrección encontrados en la literatura para que recojan de forma más precisa la no uniformidad de la corriente a su paso por este tipo de turbomáquinas.

REFERENCIAS

- [1] S. Yedidiah, "An overview of methods for calculating the head of a rotodynamic impeller and their practical significance," *Proc. Inst. Mech. Eng. Part E J. Process Mech. Eng.*, vol. 217, pp. 221-232, 2003.
- [2] C. Mataix, "*Turbomáquinas hidráulicas*," vol. 05, pp. 1718, 2009.
- [3] P. Drtina and M. Sallaberger, "Hydraulic turbines—basic principles and state-of-the-art computational fluid dynamics applications," *Proc. Inst. Mech. Eng. Part C*, vol. 213, pp. 85-102, 1999.
- [4] A. J. Stepanoff, "Centrifugal and axial flow pumps: theory design and application," 1957.
- [5] E. Weinel, "Beiträge zur rationellen Hydrodynamik der Gitterströmung," *Arch Appl Mech*, vol. 5, pp. 91-105, 1934.
- [6] A. Stodola, *Dampf-Und Gasturbinen*. Springer Berlin, 1924,
- [7] C. Pfleiderer, "Bombas centrífugas y turbocompresores," 1960.